ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ТИПА РЭЛЕЯ В СИСТЕМЕ СЛОЙ-ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ОТНОСИТЕЛЬНОМ СКОЛЬЖЕНИИ

THE SURFACE WAVES OF THE RAYLEIGH ON THE SYSTEM OF LAYER AND SEMI-SPACE BY UNDER THE RELATIVE SLIDING

Давтян Артем Александович - магистрант института механики, НАН Армения, специалист конструкторского отделении <<Прогресстех Армения >> ООО, (+37477)732734
E-mail artyom.davtyan@yahoo.com

Davtyan A. A.

Abstracr: *Start the investigation of surface waves is related to the work of Rayleigh [1], in which the existence of elastic waves propagating along the free boundary of the semi-space, with an amplitude decaying exponentially in depth semi-space. Obviously, the energy of Rayleigh waves localized near the free boundary of the semi-space. This work Rayleigh proved the existence of seismic waves reduce to earthquakes.*

It is assumed that on the surfaces of bounding layers the conditions of splitting contact take place. The layer and the semi- space are moving relative to each other with constant velocity V. The dispersion equation which define the phase velocity of surface waves has been received. The conditions of existence of the surface wave, in the particular in the case of the same material of the layer and the semi-space have been occurred. It has been investigated short wave and long wave approximations, for which it has been determined phase velocity depending on the elastic properties of the material layer and the semi-space.

Начало исследования поверхностных волн связано с работой Рэлея [1], в которой установлено существование упругих волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства, с амплитудой, экспоненциально затухающей по глубине полупространства. Очевидно, энергия волн Рэлея локализована у свободной границы полупространства. Этой работой Рэлей обосновал существования сейсмических волн приводящих к землетрясениям.

Предполагается, что на поверхностях ограничивающих слой имеют место условия Навье и скользящего контакта. Слой и полупространство движутся относительно друг друга с постоянной скоростью V. Получено дисперсионное уравнение, определяющее фазовую скорость поверхностной волны. Установлено условие существования поверхностной волны в частном случае одинаковых материалов слоя и полупространства. Исследованы коротковолновые и длинно волновые приближения, для которых определены фазовые скорости в зависимости от упругих свойства материалов слоя и полупространства.

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) упругое полупространство занимает область $-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty, -\infty < z < \infty$,упругий слой-область $-\infty < x < \infty, 0 \le y < -h, -\infty < z < \infty$. Слой и полупространство двигаются относительно друг друга параллельно плоскости раздела $y = 0$ с постоянной скоростью V .Рассматривается задача плоской деформации. Величины относящиеся к слою отмечаются индексом (1), а величины относящиеся к полупространству – индексом (2).

Уравнения движения слоя и полупространства имеют вид [1]

$$c_{t1}^2 \Delta u_1 + \left(c_{l1}^2 - c_{t1}^2\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

$$c_{t1}^2 \Delta v_1 + \left(c_{l1}^2 - c_{t1}^2\right) \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}. \quad (1.1)$$

$$c_{t2}^2 \Delta u_2 + \left(c_{l2}^2 - c_{t2}^2\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u2}{\partial t^2},$$

$$c_{t2}^2 \Delta v_2 + \left(c_{l2}^2 - c_{t2}^2\right) \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}. \quad (1.2)$$

Где приняты обозначения

$$c_{ti}^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i}, c_{li}^2 = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\rho_i} \; i = 1, 2. \quad (1.3)$$

Здесь $u_{i,} v_i$ - компоненты вектора упругих перемещений в плоскости (x, y), $\lambda_{i,} \mu_i$ - коэффициенты Ламе, ρ_i - плотности материалов слоя и полупространства соответственно.

Предполагается, что на плоскостях ограничивающих слой осуществляются условия Навье. На внешней границе слоя [2]

$$u_1 = 0, \sigma_{22}^{(1)} = 0 \text{ при } y = -h, \quad (1.4)$$

а на стыке слоя и полупространства

$$v_1 = v_2, \sigma_{21}^{(1)} = 0, \sigma_{21}^{(2)} = 0, \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} \text{ при } y = 0. \tag{1.5}$$

Требуется найти решения систем уравнений (1.1) и (1.2), удовлетворяющих граничным условиям (1.4),(1.5) и условиям затухания

$$\lim_{y\to\infty} u_2 = 0, \lim_{y\to\infty} v_2 = 0. \tag{1.6}$$

Для решения представленной задачи удобно использовать преобразование Ламе [1,2]

$$u_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}, v_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x}. \tag{1.7}$$

С помощью (1.7)системы уравнений(1.1),(1.2)преобразуются к виду

$$c_{l1}^2 \Delta \varphi_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2},$$

$$c_{t1}^2 \Delta \psi_1 = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}. \tag{1.8}$$

$$c_{l2}^2 \Delta \varphi_2 = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, c_{t2}^2 \Delta \psi_2 = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}. \tag{1.9}$$

Граничные условия(1.4),(1.5) заменяются следующими условиями

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0, \varphi_1 = 0 \text{ при } y = -h, \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ 2\dfrac{\partial^2 \psi i}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} = 0, (i = 1, 2) \\ \left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \lambda_1 \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - 2\mu_1 \dfrac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} = \left(\lambda_2 + 2\mu_2\right)\dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \lambda_2 \dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - 2\mu_2 \dfrac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \end{cases} \text{при } y = 0 \tag{1.11}$$

Условия затухания, вместо(1.6), будут

$$\lim_{y\to\infty} \varphi_2 = 0, \lim_{y\to\infty} \psi_2 = 0. \tag{1.12}$$

2. Искомые функции задачи представляются в виде гармоническими функциями для волн распространяющихся вдоль координатной линии x. Решение системы уравнений (1.9), удовлетворяющее условиям затухания(1.12) получается в виде

$$\varphi_2 = A_2 e^{-\nu_2 ky} \exp i\left(\omega t - kx\right),$$

$$\psi_2 = C_2 e^{-S_2 ky} \exp i\left(\omega t - kx\right). \tag{2.1}$$

В(2.1) A_2, C_2 - произвольные постоянные

$$\nu_2 = \sqrt{1 - \theta_2 \eta^2}, S_2 = \sqrt{1 - \eta^2}, \eta = \frac{\omega}{kc_{t2}}, \theta_2 = \frac{c_{t2}^2}{c_{l2}^2}. \tag{2.2}$$

Отсюда также следует, что безразмерная характеристика искомой фазовой скорости поверхностной волны η должна удовлетворять условию

$$|\eta| < 1. \tag{2.3}$$

Для системы уравнений(1.8)решение удовлетворяющее условиям(1.4)будет иметь вид

$$\varphi_1 = A_1 \operatorname{sh}\left[\nu_1 k\left(h + y\right)\right] \exp i\left(\omega t - kx\right),$$

$$\psi_1 = C_1 \operatorname{ch}\left[S_1 k\left(h + y\right)\right] \exp i\left(\omega t - kx\right). \tag{2.4}$$

где

$$\nu_1 = \sqrt{1 - \theta_1 \theta\left(\eta - \chi\right)^2}, S_1 = \sqrt{1 - \theta\left(\eta - \chi\right)^2}, \chi = \frac{V}{c_{t2}}, \theta_1 = \frac{c_{t1}^2}{c_{l1}^2}, \theta = \frac{c_{t2}^2}{c_{t1}^2}. \tag{2.5}$$

Подстановка(2.4) во второе граничное условие из системы четырех условий(1.11) и (2.1) в третьею граничное условие из (1.11) дает

$$C_1 = \frac{2i\nu_1}{2-\theta(\eta-\chi)^2}\frac{\operatorname{ch}\nu_1 kh}{\operatorname{ch} S_1 kh}A_1, C_2 = -\frac{2i\nu_2}{2-\eta^2}A_2. \quad (2.6)$$

Удовлетворение первому и четвертому из граничных условий (1.11) приводит к уравнениям

$$\nu_1 A_1 \operatorname{ch}\nu_1 kh + iC_1 \operatorname{ch} S_1 kh = -\nu_2 A_2 + iC_2, \quad (2.7)$$

$$\left(2-\theta(\eta-\chi)^2\right)A_1 \operatorname{sh}\nu_1 kh + 2iS_1 C_1 \operatorname{sh} S_1 kh = \gamma\left(\left(2-\eta^2\right)A_2 - 2iS_2 C_2\right).$$

где принято новое обозначение

$$\gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (2.8)$$

С помощью(2.6)задача приводится к решению системы двух однородных алгебраических решений относительно произвольных постоянных A_1, A_2

$$\frac{\nu_1\theta(\eta-\chi)^2}{2-\theta(\eta-\chi)^2}A_1 \operatorname{ch}\nu_1 kh + \frac{\nu_2\eta^2}{2-\eta^2}A_2 = 0,$$

(2.9)

$$\frac{\left(2-\theta(\eta-\chi)^2\right)^2 \operatorname{ch}\nu_1 kh - 4S_1\nu_1 \operatorname{ch}\nu_1 kh \operatorname{th} S_1 kh}{2-\theta(\eta-\chi)^2}A_1 + \gamma\frac{\left(2-\eta^2\right)^2 - 4\nu_2 S_2}{2-\eta^2}A_2 = 0.$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.9) приводит к следующему уравнению, определяющему безразмерный параметр η, характеризующий фазовую скорость поверхностной волны

$$\left(2-\eta^2\right)\operatorname{ch}[\nu_1 kh]\left(\gamma\nu_1\theta(\eta-\chi)^2\left(\left(2-\eta^2\right)^2 - 4\nu_2 S_2\right) + \nu_2\eta^2\left(\left(2-\theta(\eta-\chi)^2\right)^2 - 4\nu_1 S_1 \operatorname{th}[S_1 kh]\right)\right) = 0$$

(2.10)

В предельном случае $kh \to \infty$, т. е. для двух встречно движущихся полупространств, из (2.10) получается уравнении

$$\eta = \chi + \sqrt{1/\theta\theta_1}$$

(2.11)

$$\gamma\nu_1\theta(\eta-\chi)^2\left(\left(2-\eta^2\right)^2 - 4\nu_2 S_2\right) + \nu_2\eta^2\left(\left(2-\theta(\eta-\chi)^2\right)^2 - 4\nu_1 S_1\right) = 0.$$

которое исследовано в статьях [3,4]. Вопрос существования поверхностных волн в системе слой-полупространство при отсутствии скольжения $(V=0)$ рассмотрен в статье [5].

Уравнение (2.10) имеет корень $\eta = \chi$. Нетрудно проверить, что этому корню соответствует тривиальное решение $u_i \equiv 0, v_i \equiv 0$.Действительно, согласно (2.9) при $\eta = \chi$ следует $A_2 = 0$, а из (2.6) следует $C_2 = 0, C_1 = iA_1$. Затем из(2.1) следует $\varphi_2 = 0, \psi_2 = 0$ и согласно (1.7) при $i = 2$ получается $u_2 \equiv 0, v_2 \equiv 0$. Согласно (2.5) $v_1 = s_1 = 1$, откуда из (2.4) получается

$$\varphi_1 = A_1 \operatorname{sh} k(h+y)\exp i(\omega t - kx),$$

(2.12)

$$\psi_1 = C_1 \operatorname{ch} k(h+y)\exp i(\omega t - kx).$$

Подстановка (2.12) в (1.7) дает $\varphi_1 \equiv 0, \psi_1 \equiv 0$.

Уравнение (2.10) имеет также корень $\eta = 0$. Аналогичным образом можно показать что и этому корню соответствует тривиальное решение.

3. В частном случае, когда материалы слоя и полупространства одинаковы

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \rho_1 = \rho_2 = \rho, \quad (3.1)$$

в уравнении (2.10) следует принять $\gamma = 1, \theta = 1$, а в выражениях для v_i, s_i

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)} = \theta_*. \quad (3.2)$$

Если в приведенном примере рассматривать коротковолновое приближение

$$k^2 h^2 \gg 1, \quad (3.3)$$

то уравнение (2.10) приведется к виду

$$P_2\left(\left(2-(\eta-\chi)^2\right)^2-4P_1^2\right)=0, \tag{3.4}$$

где

$$P_1=\sqrt{1-\theta_*(\eta-\chi)^2},P_2=\sqrt{1-\theta_*\eta}. \tag{3.5}$$

Из равенства $P_2=0$ получается корень $\eta=\theta_*^{-1}$, который не удовлетворяет условию затухания (2.3). Равенство нулю второго сомножителя из (3.4) приводит к уравнению

$$(\eta-\chi)^2\left((\eta-\chi)^2-4(1-\theta_*)\right)=0. \tag{3.6}$$

Так как $\eta=\chi$ является тривиальным корнем, то решение уравнения (3.6) при $\chi>0$ и ограничении (2.3) имеет вид

$$\eta=\chi-2\sqrt{1-\theta_*} \tag{3.7}$$

если имеет место условия

$$2\sqrt{1-\theta_*}-1<\chi<2\sqrt{1-\theta_*}+1. \tag{3.8}$$

В частности, если $\theta_*=0$, то поверхностная волна существует при $1<\chi<3$ (скорость движения слоя больше скорости

сдвиговой объемной волны). Если же $\theta_*=1/3$, то поверхностная волна существует при $\chi>2\sqrt{\frac{2}{3}}-1\approx 0.63$.

Из (3.7) и (3.9) следует, что поверхностная волна может распространяться в противоположенном направлении по сравнению с направлением движения слоя.

Необходимо отметить, что в случае отсутствия движения $(\chi=0)$ для тонкого слоя (или в длинноволновом приближении) поверхностная волна не существует.

Если в приведенном примере рассматривать длинноволновое приближение

$$k^2h^2 \ll 1, \tag{3.9}$$

то уравнение (2.10) приведется к виду

$$P_2\left(\left(2-(\eta-\chi)^2\right)^2-4P_1^3kh\right)=0, \tag{3.10}$$

4. Уравнение (3.10) имеет корень при случи $\chi=0$, при произвольных значениях kh и η.

$$\sqrt{1-\theta_*\eta}\left(\left(2-\eta^2\right)^2-4\sqrt[3]{1-\theta_*\eta^2}kh\right)=0, \tag{3.11}$$

В таблице 1 приводятся некоторые значения η в зависимости от безразмерного параметра kh, характеризующего длину волны при $\theta_*=0.25(\nu=1/3)$.

Табл. 1 $\theta_*=0.25$

kh	*0*	*1.0*	*1.5*	*2.0*	*3.0*	*4.0*
η	*1.41*	*1.68*	*1,71*	*1,73*	*1,77*	*1,78*

Из таблицы видно, что поверхностная волна при $kh\to\infty$ получается значение фазовой скорости волны Рэлея.

5. Если допустить, что материал слоя не обладает жесткостью на сдвиг $\eta_1=0$, то вместо уравнения (2.10), для определения безразмерного параметра фазовой скорости η получается следующее уравнение

$$\mu_2\left[\left(2-\eta^2\right)^2-4\nu_2S_2\right]+\lambda_1\nu_2\theta_*(\eta-\chi)^2\eta^2\,\mathrm{th}\,\alpha kh=0, \tag{4.1}$$

где

$$\theta_*=\frac{c_{t2}^2}{c_{l1}^2},\alpha=\sqrt{1-\theta_*(\eta-\chi)^2}. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.1) имеет решение $\eta=\chi$, если χ есть решение известного уравнения Релея

$$\left(2-\chi^2\right)^2-4\sqrt{1-\theta_2\chi^2}\sqrt{1-\chi^2}=0 \tag{4.3}$$

при условии $\chi^2<1$. В частности, при $\theta_2=\frac{1}{3}$ следует $\eta=\chi\approx 0,919$.

В предельном случае $kh \to \infty$ уравнение (4.1) приводится к виду

$$L(\eta) \equiv \left(2-\eta^2\right)^2 - 4\nu_2 s_2 - \rho_1 \rho_2^{-1} (\eta - x)^2 \eta^2 = 0. \quad (4.4)$$

Исключая из уравнения (4.4) тривиальный корень $\eta = 0$ [6] получим

$$L(\eta) \equiv \eta^2 - \frac{41-\theta_2\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{1-\eta^2}+\sqrt{1-\theta_2\eta^2}} - \frac{\rho_1}{\rho_2}(\eta - x)^2 = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) имеет следующие свойства

$$L(-1) = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}(1+x)^2 = 0, L(1) = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}(1-x)^2 = 0, \quad (4.6)$$

$$L_1(0) = -2(1-\theta_2) - \rho_1\rho_2^{-1}x^2 < 0.$$

Из (4.6) следует, что для того чтобы уравнение (4.4) имело корни в интервалах $-1 < \eta < 0$ и $0 < \eta < 1$, достаточно наличие условий

$$\rho_1 (1+x)^2 < \rho_2 \text{ и } \rho_1 (1-x)^2 < \rho_2. \quad (4.7)$$

Так как в случае $x = 0 (v = 0)$ из (4.7) следует, что поверхностная волна существует, то движение слоя может привести к устранению поверхностной волны.

Нетрудно показать, что в длинноволновом приближении $\left(k^2h^2 \ll 1\right)$,согласно (4.1) поверхностная волна не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости М.: Мир, 1975, 872 с.
2. Miklowitz J. The theory of elastic wave and waveguides-Amsterdam: North-Holland, 1978, 648 p.
3. Заславский Ю.М. Дисперсия поверхностных волн, бегущих вдоль плоской границы встречно-скользящих полупространства и слоя. Акуст. журн. 1994, т40, №6, с. 950-952.
4. Белубекян М. В. Особенности распространения поверхностных волн вдоль границы встречно скользящих полупространств. Акуст. журнал, т45, №3, с. 418-419.
5. Белубекян М. В., Давтян А. А., Упругие волны в системе слой-полупространство при условии скользящего контакта на плоскостях ограничивающих слой. В сб. "Актуальные проблемы механики сплошной среды"(посв.Н. Х. Арутюняну). Ереван, Изд. ЕГУАС, 2012, т1. с. 116-120.
6. Белубекян М. В. Поверхностные волны в упругих средах. В сб. "Проблемы механики деформированного твердого тела". Ереван Ин-т механики НАН Армении 1997, с 79-96.

7, Белубекян М. В., Давтян А. А., Мгерян Д. Э.,Поверхностныеволнывсистемевстречно скользящихслояиполупространства, Механика 2013, Ереван, Изд. ЕГУАС, 2013, с. 101-105.